BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

# RİYAZİYYAT

## О СУЩЕСТВОВАНИИ В МАЛОМ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА-БЮРГЕРСА.IV.

**К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, М.Н.САДЫХОВ**
***Бакинский Государственный Университет***
***karlenkhudaverdiyev@yahoo.com***

*Работа посвящена изучению вопроса существования в малом классического решения одномерной смешанной задачи с однородными граничными условиями типа Рикье для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений пятого порядка типа Кортевега-де Фриза-Бюргерса:*

$$u_t(t,x)+\alpha u_{txxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)),$$

*где* $\alpha>0$ *- фиксированное число;* $0\le t\le T<+\infty,\ 0\le x\le\pi$*. Введено понятие классического решения рассматриваемой смешанной задачи. Классическое решение изучаемой смешанной задачи ищется в виде ряда Фурье:*

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx \quad (0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi),$$

*причём, после применения метода Фурье, нахождение неизвестных коэффициентов Фурье* $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ *искомого классического решения* $u(t,x)$ *сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегральных уравнений. Далее, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях* $T$ *) классического решения рассматриваемой смешанной задачи.*

В работе изучается вопрос существования в малом классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_t(t,x)+\alpha u_{txxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi), & (1)\\ u(0,x)=\varphi(x)\ \ (0\le x\le\pi), & (2)\\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0\ \ (0\le t\le T), & (3)\end{cases}$$

где $\alpha>0$ - фиксированное число ; $0<T<+\infty; F,\varphi$ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,\pi]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

## §1. Вспомогательные факты

С целью исследования классического решения задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

**1.** Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое классическое решение задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx\,, \tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t,x)\sin nx dx \ \ (n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,. \tag{5}$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\alpha n^4}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\text{☞}(u(\tau,x))\sin nx dx \ \ (n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,, \tag{6}$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx \ \ (n=1,2,...)\,, \tag{7}$$

$$\text{☞}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x))\,, \tag{8}$$

причём нужно иметь в виду обозначения (4) и (5).

**2.** Исходя из определения классического решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

**Лемма.** Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое классическое решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6).

**3.** В данной работе, с целью изучения вопроса существования классического решения задачи (1)-(3), систему (6), при предположениях

$$\text{☞}(u(t,x))\in C([0,T]\times[0,\pi]),\ \frac{\partial}{\partial x}\{\text{☞}(u(t,x))\}\in C([0,T];L_2(0,\pi)) \tag{9}$$

и

$$\text{☞}(u(t,x))\big|_{x=0}=\text{☞}(u(t,x))\big|_{x=\pi}=0 \quad \forall t\in[0,T]\,, \tag{10}$$

после интегрирования по частям по $x$ один раз в правой части (6), преобразуем к виду:

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n(1+\alpha n^4)}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\{\text{☞}(u(\tau,x))\}\cos nx dx d\tau \ \ (n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,. \tag{11}$$

**4.** Обозначим через $B^{\alpha_0,...,\alpha_l}_{\beta_0,...,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (4), рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \le t \le T} \left| u_n^{(i)}(t) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < +\infty \,, \qquad (12)$$

где $l \ge 0$ - целое число, $\alpha_i \ge 0$ $(i = \overline{0,l})$, $1 \le \beta_i \le 2$ $(i = \overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Известно (см.[1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,t}} \equiv \sum_{i=0}^{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \le \tau \le t} \left| u_n^{(i)}(\tau) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \quad (0 \le t \le T) \,. \qquad (13)$$

**5.** Для функции $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовём её $n$-й компонентой. Пусть 💣- любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$. Совокупность $n$-х компонент всех функций из 💣 обозначим через 💣$_n$. Справедлива (см.[1]) следующая

**Теорема 1.** Для компактности множества 💣 $\subset B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

*а*) для каждого фиксированного $n$ $(n = 1,2,\dots)$ множество 💣$_n$ компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

*б*) для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_\varepsilon$, один и тот же для всех $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in$ 💣 такой, что

$$\sum_{i=0}^{l} \left\{ \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \left( n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \le t \le T} \left| u_n^{(i)}(t) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon \qquad \forall u \in 💣.$$

**6.** Очевидно, что если $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^k_{2,T}$, то $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|_{B^{k-1}_{1,t}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \cdot \max_{0 \le \tau \le t} |u_n(\tau)| \le \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^k \cdot \max_{0 \le \tau \le t} |u_n(\tau)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B^k_{2,t}} \,, \qquad (14)$$

где $k$ – любое натуральное число.

7. Пусть $u(t,x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^5_{2,T}$. Тогда, пользуясь оценкой (14) для $k = 5$, $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$ имеем:

$$\left|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^i \cdot |u_n(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^i \cdot \max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)| = \|u\|_{B_{1,t}^4} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B_{2,t}^5} \quad (i=\overline{0,4})\,. \tag{15}$$

Из оценок (15) и структуры пространства $B_{2,T}^5$ следует, что

$$u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_{xxxx}(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi])\,. \tag{16}$$

Кроме того, очевидно, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_0^{\pi} u_{xxxxx}^{2}(t,x)\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5 \cdot u_n(t)\right)^2 \le \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5 \cdot \max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \|u\|_{B_{2,t}^5}^2\,. \tag{17}$$

Из (17) и структуры пространства $B_{2,T}^5$, следует, что

$$u_{xxxxx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi))\,. \tag{18}$$

**8.** Пусть для натурального числа $k$:

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0,\pi]), \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0,\pi), \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \left(s = \overline{0, \left[\frac{k-1}{2}\right]}\right). \tag{19}$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя, легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k \cdot \varphi_n\right)^2 \le \frac{2}{\pi} \cdot \left\|\varphi^{(k)}(x)\right\|_{L_2(0,\pi)}^2, \tag{20}$$

где числа $\varphi_n$ $(n=1,2,...)$ определены соотношением (7), причём очевидно, что оценка (20) верна и при $k=0$, если $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$.

**9.** В заключение параграфа условимся всюду в этой работе считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

## §2. Исследование единственности классического решения задачи (1)-(3)

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом классического решения задачи (1)-(3).

**Теорема 2.** Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_5) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5\right)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^5$

   $$|F(t,x,u_1,...,u_5) - F(t,x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_5)| \le C_R \cdot \sum_{i=1}^{5}|u_i - \tilde{u}_i|,$$

   где $C_R > 0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

## §3. Исследование существования в малом классического

**решения задачи (1)-(3)**

В этом параграфе, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема о существовании в малом (т. е. справедливая при достаточно малых значениях $T$ ) классического решения задачи (1)-(3).

**Теорема 3.** Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(4)}([0,\pi])$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,\pi)$ и
   $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(\pi)=0$.
2. $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_5), F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_5)(i=\overline{0,5}) \in C\big([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5\big)$.
3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0)=0 \;\; \forall t\in[0,T], \xi_2,\xi_4 \in(-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)-(3).

**Доказательство.** Для каждого фиксированного $u \in B_{1,T}^4$ определим в $B_{2,T}^5$ оператор (относительно $V$ ) $\text{⚐}_u$ :

$$\text{⚐}_u(V(t,x)) = \widetilde{V}(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{V}_n(t)\sin nx\,, \tag{21}$$

где

$$\widetilde{V}_n(t) = \varphi_n + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n(1+\alpha n^4)}\cdot\int_0^t\int_0^\pi \text{➰}_u(V(\tau,x))\cos nx dx d\tau \;\; (n=1,2,\ldots; t\in[0,T])\,, \tag{22}$$

числа $\varphi_n$ $(n=1,2,\ldots)$ определены соотношением (7),

$$\text{➰}_u(V(t,x)) = G(u(t,x)) + g_5(u(t,x))\cdot V_{xxxxx}(t,x)\,, \tag{23}$$

$$g_i(u(t,x)) = F_{\xi_i}(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)) \;\; (i=\overline{0,5})\,, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} G(u(t,x)) = {} & g_0(u(t,x)) + g_1(u(t,x))\cdot u_x(t,x) + g_2(u(t,x))\cdot u_{xx}(t,x) + \\ & + g_3(u(t,x))\cdot u_{xxx}(t,x) + g_4(u(t,x))\cdot u_{xxxx}(t,x)\,, \end{aligned} \tag{25}$$

причём $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_5$ - обозначения аргументов функции $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_5)$.

Очевидно, что

$$\forall u \in B_{2,T}^5 \;\; \text{➰}_u(u(t,x)) = \frac{\partial}{\partial x}\{\text{☞}(u(t,x))\}, \tag{26}$$

где оператор ☞ определён соотношением (8).

Из (22) получаем, что при любом фиксированном $u \in B_{1,T}^4$ $\forall V \in B_{2,T}^5$ и $t\in[0,T]$:

$$\big\|\widetilde{V}\big\|_{B_{2,t}^5}^2 \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\Big(n^5\cdot\max_{0\le\tau\le t}\big|\widetilde{V}_n(\tau)\big|\Big)^2 \le a_0 + \frac{\pi T}{\alpha^2}\cdot\int_0^T\int_0^\pi\{\text{➰}_u(V(\tau,x))\}^2 dx d\tau\,, \tag{27}$$

где

$$a_0 \equiv 2\sum_{n=1}^{\infty}(n^5\cdot\varphi_n)^2\,, \tag{28}$$

причём конечность $a_0$ следует из (20) для $k=5$.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B_{1,T}^4$ $\forall V \in B_{2,T}^5$:

$$\|\mathfrak{P}_u(V)\|_{B_{2,T}^5}^2 \equiv \|\widetilde{V}\|_{B_{2,T}^5}^2 \le a_0 + \frac{\pi T}{\alpha^2} \cdot \int_0^T \int_0^\pi \{\mathfrak{Q}_u(V(\tau,x))\}^2 \, dx d\tau \,. \qquad (29)$$

Далее, $\forall u \in B_{1,T}^4$ имеем:

$$\left\| \frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i} \right\|_{C(Q_T)} \le \|u\|_{B_{1,T}^i} \le \|u\|_{B_{1,T}^4} \quad (i=\overline{0,4})\,, \qquad (30)$$

где $Q_T \equiv [0,T] \times [0,\pi]$.

Кроме того, при любом $V = V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin nx \in B_{2,T}^5$ $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_0^\pi V_{xxxxx}^2(t,x)dx = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^5 \cdot V_n(t)\right)^2 \le \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^5 \cdot \max_{0 \le \tau \le t} |V_n(\tau)|\right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \|V\|_{B_{2,t}^5}^2 \,. \quad (31)$$

Теперь, пользуясь условием 2 данной теоремы, выражениями $g_i(u(t,x))$, $G(u(t,x))$, определёнными соотношениями (24) и (25), и оценками (30), $\forall u \in B_{1,T}^4$ имеем:

$$\|g_i(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u) \ \ (i=\overline{0,5}), \quad \|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u)\,, \qquad (32)$$

где $C(u) > 0$ - некоторая постоянная, зависящая от $u$.

Таким образом, пользуясь оценками (32),(31) и соотношением (23), из (29) получаем, что при каждом фиксированном $u \in B_{1,T}^4$ $\forall V \in B_{2,T}^5$:

$$\|\mathfrak{P}_u(V)\|_{B_{2,T}^5}^2 \le a_0 + \frac{\pi T}{\alpha^2} \cdot \int_0^T \int_0^\pi \{\mathfrak{Q}_u(V(\tau,x))\}^2 \, dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{2\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot C^2(u) \cdot \left(1 + 4\|u\|_{B_{1,T}^4}\right)^2 + \frac{\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot C^2(u) \cdot \|V\|_{B_{2,T}^5}^2 \,. \qquad (33)$$

Из (33) следует, что для любого фиксированного $u \in B_{1,T}^4$ оператор $\mathfrak{P}_u$ действует в $B_{2,T}^5$, причём ограниченно.

Теперь, пользуясь соотношениями (21)-(25), первой из оценок (32) и оценкой (31) (для $V = V_1 - V_2$), аналогично (27) получаем, что при любом фиксированном $u \in B_{1,T}^4$ $\forall V_1, V_2 \in B_{2,T}^5$ и $t \in [0,T]$:

$$\|\mathfrak{P}_u(V_1) - \mathfrak{P}_u(V_2)\|_{B_{2,t}^5}^2 \le \frac{\pi T}{\alpha^2} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\mathfrak{Q}_u(V_1(\tau,x)) - \mathfrak{Q}_u(V_2(\tau,x))\}^2 \, dx d\tau \le$$

$$\le \frac{\pi^2 T}{2\alpha^2} \cdot C^2(u) \cdot \int_0^t \|V_1 - V_2\|_{B_{2,\tau}^5}^2 d\tau \le \frac{\pi^2 T}{2\alpha^2} \cdot C^2(u) \cdot \|V_1 - V_2\|_{B_{2,T}^5}^2 \cdot t\,, \quad (34)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\left\| \mathcal{P}_u^k(V_1) - \mathcal{P}_u^k(V_2) \right\|_{B_{2,t}^5}^2 \le \left( \frac{\pi^2 T}{2\alpha^2} \cdot C^2(u) \right)^k \cdot \left\| V_1 - V_2 \right\|_{B_{2,T}^5}^2 \cdot \frac{t^k}{k!}, \tag{35}$$

где $k$ - любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B_{1,T}^4$ $\forall V_1, V_2 \in B_{2,T}^5$:

$$\left\| \mathcal{P}_u^k(V_1) - \mathcal{P}_u^k(V_2) \right\|_{B_{2,T}^5} \le q_k(u) \cdot \left\| V_1 - V_2 \right\|_{B_{2,T}^5}, \tag{36}$$

где

$$q_k(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{k!}} \cdot \left\{ \frac{\pi^2 T^2}{2\alpha^2} \cdot C^2(u) \right\}^{\frac{k}{2}}. \tag{37}$$

Очевидно, что для достаточно больших $k = k_u : q_k(u) < 1$. Для таких $k$ оператор $\mathcal{P}_u^k$ оказывается сжатым в пространстве $B_{2,T}^5$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B_{2,T}^5$ неподвижная точка $V$ оператора $\mathcal{P}_u^k$ является и единственной в $B_{2,T}^5$ неподвижной точкой оператора $\mathcal{P}_u$:

$$V = \mathcal{P}_u(V), V \in B_{2,T}^5. \tag{38}$$

Сопоставив каждому $u \in B_{1,T}^4$ единственную в $B_{2,T}^5$ неподвижную точку $V$ оператора $\mathcal{P}_u$ порождаем оператор $H$:

$$H(u) = V = \mathcal{P}_u(V), \tag{39}$$

действующий из $B_{1,T}^4$ в $B_{2,T}^5$.

Покажем непрерывность оператора $H$. Пусть

$$B_{1,T}^4 \ni u_k(t,x) \xrightarrow{B_{1,T}^4} u_0(t,x) \in B_{1,T}^4 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{40}$$

Тогда, в силу (30) для $u = u_k - u_0$, очевидно, что

$$\frac{\partial^i u_k(t,x)}{\partial x^i} \xrightarrow{C(Q_T)} \frac{\partial^i u_0(t,x)}{\partial x^i} \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad (i = \overline{0,4}) \tag{41}$$

и существует такое число $R_0 > 0$, что $\forall k$ $(k = 1,2,...)$ и $t \in [0,T]$, $x \in [0,\pi]$:

$$-R_0 \le u_k(t,x), u_{k,x}(t,x), u_{k,xx}(t,x), u_{k,xxx}(t,x), u_{k,xxxx}(t,x) \le R_0. \tag{42}$$

Следовательно

$$\left\| G(u_k(t,x)) - G(u_0(t,x)) \right\|_{C(Q_T)} \equiv \varepsilon_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{43}$$

$$\left\| g_5(u_k(t,x)) - g_5(u_0(t,x)) \right\|_{C(Q_T)} \equiv \delta_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{44}$$

$$\left\| g_5(u_k(t,x)) \right\|_{C(Q_T)} \le C_0 \qquad (k = 1,2,...), \tag{45}$$

где операторы $G$ и $g_5$ определены соотношениями (25) и (24), а $C_0 > 0$ - постоянная.

Примем обозначения:

$$H(u_k) = V_k \qquad (V_k = \mathcal{P}_u(V_k)), \quad k = 0,1,... . \tag{46}$$

Тогда, пользуясь соотношениями (21)-(25), (43),(44), оценкой (45) и оценкой (31) (для $V = V_k - V_0$ и $V = V_0$), аналогично (34) получаем, что $\forall k \ (k = 1,2,...)$ и $t \in [0,T]$:

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \|V_k - V_0\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \left\| ⚐_{u_k}(V_k) - ⚐_{u_0}(V_0) \right\|^2_{B^5_{2,t}} \le$$

$$\le \frac{3\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot \left\{ \varepsilon_k^2 + \frac{1}{2} \|V_0\|^2_{B^5_{2,T}} \cdot \delta_k^2 \right\} + \frac{3\pi^2 T}{2\alpha^2} \cdot C_0^2 \cdot \int_0^t \|V_k - V_0\|^2_{B^5_{2,\tau}} d\tau \,. \qquad (47)$$

Из (47), применив неравенство Беллмана, получаем:

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^5_{2,T}} \equiv \|V_k - V_0\|^2_{B^5_{2,T}} \le \frac{3\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot \left\{ \varepsilon_k^2 + \frac{1}{2} \|V_0\|^2_{B^5_{2,t}} \cdot \delta_k^2 \right\}$$

$$\cdot \exp\left\{ \frac{3\pi^2 T}{2\alpha^2} \cdot C_0^2 \cdot T \right\}, \qquad k = 1,2,... \,. \qquad (48)$$

Отсюда, в силу (43) и (44), следует, что

$$H(u_k) \xrightarrow{B^5_{2,T}} H(u_0) \text{ при } k \to \infty \,. \qquad (49)$$

Таким образом, оператор $H$ действует из $B^4_{1,T}$ в $B^5_{2,T}$ непрерывно и, тем более, он действует в $B^4_{1,T}$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора $H$ в $B^4_{1,T}$. Пусть $☺ = ☺_R$ - любой замкнутый шар пространства $B^4_{1,T}$ радиуса $R$ и с центром в нуле. Тогда очевидно, что при любом $u \in ☺_R$, в силу (30), $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$:

$$-R_0 \le u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_{xxxx}(t,x) \le R \,. \qquad (50)$$

Тогда очевидно, что

$$\forall u \in ☺_R \qquad \|g_i(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R \quad (i = \overline{0,5}), \quad \|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R \,, \quad (51)$$

где $C_R > 0$ - постоянная, а $g_i \ (i = \overline{0,5})$ и $G$ определены соотношениями (24) и (25).

Пользуясь оценками (51),(31) и соотношениями (21)-(25), аналогично (27) получаем, что при любом $u \in ☺_R \quad \forall t \in [0,T]$:

$$\|H(u)\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \|V\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \|⚐_u(V)\|^2_{B^5_{2,t}} \le a_0 + \frac{\pi T}{\alpha^2} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{ ☯_u(V(\tau,x)) \}^2 dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{2\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot C_R^2 + \frac{\pi^2 T}{\alpha^2} \cdot C_R^2 \cdot \int_0^t \|V\|^2_{B^5_{2,\tau}} d\tau \,. \qquad (52)$$

Из (52), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u \in ☺_R$:

$$\|H(u)\|^2_{B^5_{2,T}} \equiv \|V\|^2_{B^5_{2,T}} \le \left( a_0 + \frac{2\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot C_R^2 \right) \cdot \exp\left\{ \frac{\pi^2 T}{\alpha^2} \cdot C_R^2 \cdot T \right\} \equiv a_R^2 \,. \qquad (53)$$

Далее, так как $\forall u \in B^4_{1,T}$

$$H(u) = V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin nx \,,$$

где $V_n(t) \quad (n = 1,2,...)$ равна правой части (22), то очевидно, что

$$V_n'(t)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n(1+\alpha n^4)}\cdot\int_0^\pi \mathfrak{N}_u(V(t,x))\cos nx dx \quad (n=1,2,...;\ t\in[0,T]). \qquad (54)$$

Теперь, пользуясь соотношением (23) и оценками (51),(31),(53), получаем, что при любом $u\in\ominus_R$ $\forall n\ (n=1,2,...)$ и $t\in[0,T]$:

$$\left|\int_0^\pi \mathfrak{N}_u(V(t,x))\cos nx dx\right|\le\int_0^\pi|\mathfrak{N}_u(V(t,x))|dx\le C_R\cdot\int_0^\pi\{1+|V_{xxxxx}(t,x)|\}dx=C_R\cdot\pi+$$

$$+C_R\cdot\int_0^\pi|V_{xxxxx}(t,x)|dx\le\pi\cdot C_R+C_R\cdot\sqrt{\pi}\cdot\left\{\int_0^\pi V_{xxxxx}^2(t,x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\le\pi\cdot C_R+C_R\cdot\sqrt{\pi}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\|V\|^2_{B^5_{2,t}}\right\}^{\frac{1}{2}}\le\pi\cdot C_R+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot C_R\cdot\|V\|_{B^5_{2,T}}\le\pi\cdot C_R+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot C_R\cdot a_R\equiv b_R. \qquad (55)$$

Тогда из (54) получаем, что $\forall n\ (n=1,2,...)$:

$$n^4\cdot\max_{0\le t\le T}|V_n'(t)|\le\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{1+\alpha n^4}\cdot b_R\le\frac{2}{\pi\alpha}\cdot b_R\cdot\frac{1}{n}. \qquad (56)$$

Следовательно

$$\|V_t\|^2_{B^4_{2,T}}\equiv\sum_{n=1}^\infty\left(n^4\cdot\max_{0\le t\le T}|V_n'(t)|\right)^2\le\left(\frac{2}{\pi\alpha}\cdot b_R\right)^2\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi\alpha}\cdot b_R\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{2}{3\alpha^2}\cdot b_R^2\equiv c_R^2. \qquad (57)$$

Таким образом, из (53) и (57) следует, что

$$\forall u\in\ominus_R\qquad \|H(u)\|_{B^{5,4}_{2,2,T}}\equiv\|V\|_{B^{5,4}_{2,2,T}}=\|V\|_{B^5_{2,T}}+\|V_t\|_{B^4_{2,T}}\le a_R+c_R\equiv d_R, \qquad (58)$$

следовательно, множество $H(\ominus_R)$ ограничено в $B^{5,4}_{2,2,T}$. Отсюда следует справедливость следующих двух фактов:

*а*) для каждого фиксированного $n\ (n=1,2,...)$ совокупность $n$-х компонент всех элементов, принадлежащих $H(\ominus_R)$, ограничена в $C^{(1)}([0,T])$ и, следовательно, по теореме Арцела, компактна в $C([0,T])$;

*б*) в силу оценок

$$\sum_{n=N}^\infty n^4\cdot\max_{0\le t\le T}|V_n(t)|\le\left(\sum_{n=N}^\infty\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{n=N}^\infty\left(n^5\cdot\max_{0\le t\le T}|V_n(t)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le a_R\cdot\left(\sum_{n=N}^\infty\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для любого $\varepsilon>0$ существует номер $n_\varepsilon$, один и тот же для всех $H(u)=V=$ $=\sum_{n=1}^\infty V_n(t)\sin nx\in H(\ominus_R)$, такой, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^\infty n^4\cdot\max_{0\le t\le T}|V_n(t)|<\varepsilon\qquad\forall V\in H(\ominus_R).$$

Следовательно, по теореме 1, множество $H(\ominus_R)$, рассматриваемое как подмножество пространства $B^4_{1,T}$, компактно в $B^4_{1,T}$. Таким образом, оператор $H$ переводит каждое ограниченное в $B^4_{1,T}$ множество 💣 в компактное в $B^4_{1,T}$ множество $H(\bullet)$, т.е. оператор $H$ действует в $B_{1,T}^4$ компактно. Так как, как доказано выше, оператор $H$ действует в $B_{1,T}^4$ и непрерывно, то он действует в $B_{1,T}^4$ вполне непрерывно.

Далее, в силу (15) (для $k=5$ ) и (53),

$$\|H(u)\|_{B_{1,T}^4} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|H(u)\|_{B_{2,T}^5} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot a_R = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \left(a_0 + \frac{2\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot C_R^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{\pi^2 T^2}{2\alpha^2} \cdot C_R^2\right\}, \quad (59)$$

где числа $a_0$ и $C_R$ определены соотношениями (28) и (51).

Из (59) видно, что если число

$$R > \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{a_0} \qquad (60)$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях $T$ $\forall u \in \ominus_R$ $\|H(u)\|_{B_{1,T}^4} \le R$, т.е. $H(\ominus_R) \subset \ominus_R$.

Таким образом, для каждого фиксированного $R$, удовлетворяющего условию (60), при достаточно малых значениях $T$ оператор $H$ преобразует шар $\ominus_R$ в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях $T$ оператор $H$ имеет в $\ominus_R$ по крайней мере одну неподвижную точку $u$:

$$u = H(u). \qquad (61)$$

Так как $u = H(u) = V = \Phi_u(V)$, то $u = V$ и, следовательно, $u = H(u) = \Phi_u(u)$, причём, в силу (61) и (58),

$$u(t,x) \in B_{2,2,T}^{5,4}. \qquad (62)$$

Далее, в силу (26), $\Psi_u(u) = \dfrac{\partial}{\partial x}\{f(u(t,x))\}$ и, следовательно, для найденной неподвижной точки $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (11); кроме того, в этом случае соотношение (54) принимает вид:

$$u_n'(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n(1+\alpha n^4)} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}\{f(u(t,x))\} \cos nx dx \quad (n = 1,2,\ldots;\ t \in [0,T]). \qquad (63)$$

Очевидно, что для функции $u(t,x) \in B_{2,T}^5$, в силу условий 2,3 данной теоремы и свойств (16),(18),(3) функции $u(t,x)$, выполнены все условия (9) и (10). Поэтому функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots)$, удовлетворяющие системе (11), удовлетворяют и системе (6).

Из соотношения $u(t,x) \in B_{2,T}^4$ следует, что

$$u_t(t,x), u_{tx}(t,x), u_{txx}(t,x), u_{txxx}(t,x) \in C([0,T] \times [0,\pi]); \qquad (64)$$

$$u_{txxxx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi)). \qquad (65)$$

Далее, пользуясь свойствами (16), (18) функции $u(t,x)$ и соотношением (63), информация (65) усиливается, а именно, показывается, что

$$u_{txxxx}(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi]);\ u_{txxxxx}(t,x) \in C([0,T];L_2(0,\pi)). \qquad (66)$$

Наконец, пользуясь тем, что функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6), показывается, что найденная функция $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$, обладающая свойствами (16), (18), (64) и (66), является классическим решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Так как из условия 2 теоремы 3 следует выполнение всех условий теоремы 2, то при условиях теоремы 3 классическое решение задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

**Замечание 2.** Отметим, что классическое решение $u(t,x)$ задачи (1)-(3), найденное нами в процессе доказательства теоремы 3, обладает следующими дополнительными (по сравнению с определением классического решения) свойствами:

$$u_{xxxxx}(t,x), u_{txxxxx}(t,x) \in C([0,T];L_2(0,\pi)); \qquad (67)$$

$$u_{xxxx}(t,0)=u_{xxxx}(t,\pi)=u_{txx}(t,0)=u_{txx}(t,\pi)=u_{txxxx}(t,0)=u_{txxxx}(t,\pi)=0\ (0\le t\le T). \qquad (68)$$

**Замечание 3.** Как видно из процесса доказательства теоремы 3 о существовании в малом классического решения задачи (1)-(3), при условиях теоремы 3 для доказательства существования и в целом классического решения задачи (1)-(3) достаточно показать, что всевозможные классические решения задачи (1)-(3), принадлежащие пространству $B^5_{2,T}$, априори ограничены в $B^5_{2,T}$.

**Замечание 4.** В заключение отметим, что данная работа является продолжением работы [2], в которой изучены вопросы существования и единственности решения почти всюду задачи (1)-(3).

### ЛИТЕРАТУРА


1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. Дис…докт.физ.-мат.наук, Азербайджанский Государственный Университет, Баку, 1973, 319 с.
2. Худавердиев К.И., Садыхов М.Н. О существовании в малом решения почти всюду одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных уравнений типа Кортевега-де Фриза-Бюргерса // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2008, №3, с.5-13.


## KORTEVEQ-DE FRİZ-BYURQERS TİPLİ BİR SİNİF QEYRİ-XƏTTİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN KLASSİK HƏLLİNİN LOKAL VARLIĞI HAQQINDA.IV.


**K.İ.XUDAVERDİYEV, M.N.SADIXOV**


### XÜLASƏ


İş bir sinif Korteveq-de Friz-Byurqers tipli beşinci tərtib yarım-xətti

$u_t(t,x)+\alpha u_{txxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x))$ $(0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi)$

tənlikləri üçün Rikye tipli bircins sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin klassik həllinin lokal varlığı məsələsinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur, burada $\alpha > 0$ - sabitdir. Baxılan qarışıq məsələnin klassik həllinə tərif verilir. Öyrənilən qarışıq məsələnin klassik həlli

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \quad (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi)$$

Furye sırası şəklində axtarılır. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra axtarılan $u(t,x)$ klassik həllinin naməlum $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$ Furye əmsallarının tapılması müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra, ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipini tərpənməz nöqtə haqqında Şauder prinsipilə kombinasiya etməklə baxılan qarışıq məsələnin klassik həllinin lokal varlığı (yəni $T$ -nin kafi qədər kiçik qiymətləri üçün) haqqında teorem isbat edilmişdir.

## ON THE EXISTENCE IN SMALL OF CLASSICAL SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF NON-LINEAR EQUATIONS OF CORTEVEGUE-DE VRIES-BURGERS TYPE.IV.

**K.I.KHUDAVERDIYEV, M.N.SADIKHOV**

### SUMMARY

This work is dedicated to the proof of existence in small of classical solution for one-dimensional mixed problem with Riquier type homogenous boundary conditions for one class of fifth order semi-linear differential equations of Cortevegue-de Vries-Burgers type of the following form:

$$u_t(t,x) + \alpha u_{txxxx}(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)) \ (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi),$$

with $\alpha > 0$ - number. The concept of classical solution for the given mixed problem is introduced. The classical solution of mixed problem under consideration is sought in the form of Fourier series

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \quad (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi).$$

After applying Fourier method, the problem of finding unknown Fourier coefficients $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$ of the sought classical solution $u(t,x)$ is reduced to solving some countable system of nonlinear integral equations. Next, by combining the generalized contacted mapping principle and Scauder's fixed point principle, the existence in small theorem (that is, true for sufficiently small values of $T$ ) for classical solution of the mixed problem under consideration is proved.